Equazioni di Bernoulli

♣ Sono equazioni del prim'ordine del tipo

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y^{\alpha}(t) \tag{1}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ (altrimenti si ricadrebbe in un'equazione lineare).

♣ Si effettua la sostituzione

$$y(t) = z^{1/(1-\alpha)}(t) \;\Leftrightarrow\; z(t) = y^{1-\alpha}(t)$$

da cui

$$y'(t) = \frac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)}(t) z'(t).$$

♣ Quindi la (1) si riduce a

$$z'(t) + (1-\alpha)a(t)z(t) = (1-\alpha)b(t)$$

che è un'equazione lineare.

Esercizio 13

Risolvere

$$\begin{cases} y'(t) - \frac{y(t)}{t} = y^3(t)\sin(t) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

È un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 3$. Ponendo $y(t) = z^{-1/2}(t)$ si ottiene

$$y'(t) = -\frac{1}{2} z^{-3/2}(t) z'(t).$$

Sostituendo nell'equazione

$$-\frac{1}{2} z^{-3/2}(t) z'(t) - \frac{1}{t} z^{-1/2}(t) = z^{-3/2}(t) \sin(t).$$

Moltiplicando per $(-2z^{3/2}(t))$ si arriva al problema di Cauchy in z

$$\begin{cases} z'(t) + \frac{2}{t} z(t) = -2\sin(t) \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

<u>Risoluzione dell'equaz. in z</u>: è un'equazione lineare del primo ordine con

$$a(t) = \frac{2}{t} \quad \text{e} \quad b(t) = -2\sin(t),$$

da cui

$$A(t) = \int_1^t \frac{2}{s}\, \mathrm{d}s = 2\log(t).$$

Usando la formula risolutiva si arriva a

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-2\log(t)} \left(z(1) + \int_1^t e^{2\log(s)} (-2\sin(s))\, \mathrm{d}s \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \left(1 + \int_1^t (-2\sin(s)) s^2\, \mathrm{d}s \right) \end{aligned}$$

Calcolo l'integrale applicando la formula di integrazione per parti due volte:

$$\begin{aligned}
&\int_1^t (-2\sin(s))s^2\,\mathrm{d}s \\
&\quad = 2\int_1^t (2s)(-\cos(s))\,\mathrm{d}s - 2\left[s^2(-\cos(s))\right]_1^t \\
&\quad = 4\int_1^t \sin(s)\,\mathrm{d}s - 4\left[s\sin(s)\right]_1^t - 2\left[s^2(-\cos(s))\right]_1^t \\
&\quad = -4\cos(t) + 4\cos(1) - 4t\sin(t) \\
&\qquad + 4\sin(1) + 2t^2\cos(t^2) - 2\cos(1)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
z(t) = \frac{1}{t^2}\Big(&1 - 4\cos(t) + 2\cos(1) \\
&- 4t\sin(t) + 4\sin(1) + 2t^2\cos(t^2)\Big)
\end{aligned}$$

da cui

$$y(t) = z^{-1/2}(t) = \ldots\ldots$$

Esercizio 14

Risolvere

$$\begin{cases} y'(t) + ty(t) = t^3y^2(t) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

È un'eq. di Bernoulli con $\alpha = 2$. Ponendo $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ si ottiene $y'(t) = -\frac{1}{z^2(t)} z'(t)$, da cui

$$-\frac{1}{z^2(t)} z'(t) + \frac{t}{z(t)} = \frac{t^3}{z^2(t)}.$$

Moltiplicando per $(-z^2(t))$ si arriva al problema di Cauchy in z

$$\begin{cases} z'(t) - tz(t) = -t^3 \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione dell'equaz. in z: ho un'equazione lineare del primo ordine con

$$a(t) = -t \quad \text{e} \quad b(t) = -t^3,$$

da cui

$$A(t) = \int_1^t (-s)\, \mathrm{d}s = -\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Per calcolare z applico la formula risolutiva:

$$z(t) = e^{-1/2} e^{t^2/2} \left(z(1) + \int_1^t (-s^3) e^{1/2} e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s \right) = \ldots$$

Procedendo per sostituzione e integrando per parti concludo

$$z(t) = -2e^{-1/2} e^{t^2/2} + t^2 + 2$$

e quindi

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{-2e^{-1/2} e^{t^2/2} + t^2 + 2}.$$